

ANALIZA NAPONA

Svako tijelo, odnosno građevinska konstrukcija je izložena dejstvu spoljašnjih aktivnih sila (opterećenja koja djeluju na konstrukciju) i reaktivnih sila (reakcije oslonaca iz Mehanike). Pod dejstvom aktivnih i reaktivnih sila konstrukcija se deformiše i u presjecima se javljaju unutrašnje sile (presječne sile koje smo naučili da određujemo i crtamo u prvom dijelu semestra iz Mehanike) koje se suprotstavljaju predmetnoj deformaciji. Ako je tijelo (konstrukcija) u ravnoteži, odna su unutrašnje sile u ravnoteži sa spoljašnjim silama (uslovi ravnoteže iz Mehanike).

Presječne sile je potrebno svesti na nivo napona u pojedinim tačkama konstrukcije kako bi dostigli konačan cilj Otpornosti materijala, a to je dimenzionisanje građevinskih konstrukcija. Dimenzionisanje predstavlja postupak određivanja dimenzija poprečnih presjeka konstrukcije iz različitih uslova. U građevinarstvu su to najčešće uslovi sigurnosti i upotrebljivosti konstrukcije.

Dakle, potrebno je presječne sile svesti na nivo napona. Zatim se računa maksimalni napon u konstrukciji i iz uslova da maksimalni napon mora biti manji od dopuštenog napona se vrši dimenzionisanje konstrukcije. Ova metoda proračuna je poznata kao metoda dopuštenih napona. Dopušteni napon je karakteristika materijala, veličina koja se određuje u laboratoriji na osnovu testa jednoaksijalnog istezanja. U savremenoj tehničkoj regulativi se koriste i druge metode proračuna, npr. metoda graničnih stanja.

Da bi smo sračunali maksimalni napon potrebno je da znamo šta je to napon, koje su njegove komponente, kako se računa stanje napona u tački i dr. što će nadalje biti ukratko izloženo.

1. POJAM NAPONA, KOMPONENTE NAPONA, PROSTORNO STANJE NAPONA, TENZOR NAPONA

Posmatrajmo proizvoljnu tačku napregnutog tijela, odnosno malu površinu ΔA sa normalom \vec{n} u okolini tačke. Ako je $\Delta \vec{F}$ rezultata unutrašnjih sila u tački, onda je **vektor ukupnog napona** \vec{p} u predmetnoj tački za normalu \vec{n} :

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$

Jedinice mjere:

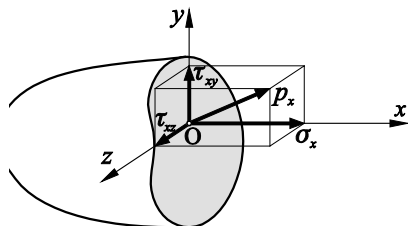
Na osnovu definicije napona očigledno je da se naponi mjere u jedinicama sile podijeljenim sa jedinicom površine. U međunarodnom sistemu jedinica (SI) jedinica za napon je **paskal**. To je napon koji se dobije kada se sila od **1N** podjeli sa površinom **1m²** i označava se oznakom **Pa**. Pošto je **Pa** isuviše mala veličina u odnosu na napone koji se javljaju u građevinskim konstrukcijama, obično se koristi **10⁶** (milion) puta veća jedinica **mega paskal** sa oznakom **MPa (1MN/m²)**. Često se naponi iskazuju i u **N/mm²** jer je **1N/mm² = 1MN/m² = 1MPa**. Koristi se i izvedena jedinica **1kN/cm² = 10⁻¹MPa**.

Komponente napona:

Dakle, napon je vektorska veličina, t.j. moramo znati intenzitet, pravac i smjer napona.

Obično se vektor ukupnog napona projektuje na pravac normale \mathbf{n} i pravac \mathbf{l} koji se nalazi u posmatranoj ravni. Na taj način se dobijaju **komponente napona: normalni napon σ_n , i smičući ili tangencijalni napon τ_{nl} .**

Ako posmatramo ravan čija je normala Dekartova osa \mathbf{x} , ona imamo sledeće:



\mathbf{p}_x – vektor ukupnog ili totalnog napona za ravan sa normalom \mathbf{x} ;

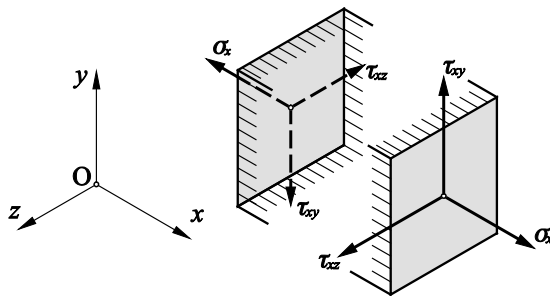
σ_x – normalni napon u ravni sa normalom \mathbf{x} ;

τ_{xy} – smičući napon u ravni sa normalom \mathbf{x} u pravcu \mathbf{y} ose;

τ_{xz} – smičući napon u ravni sa normalom \mathbf{x} u pravcu \mathbf{z} ose;

Konvencija o znaku komponentalnih napona:

Na elementu površine sa smjerom spoljne normale u smjeru koordinatne ose pozitivni komponentalni naponi djeluju u pozitivnom pravcu koordinatnih osa. Na elementu površine sa smjerom spoljne normale suprotnom od smjera koordinatne ose pozitivni komponentalni naponi djeluju u negativnom pravcu koordinatnih osa kako je prikazano na narednoj slici.



Stanje napona u tački:

Prethodno je naznačeno da za istu tačku imamo različite napone za različite ravni kroz tačku. Stanje napona u tački poznajemo ako poznajemo vektor ukupnog napona za proizvoljnu ravan kroz tačku. Vektor ukupnog napona se može izračunati ako poznajemo 3 vektora ukupnog napona za tri međusobno okomite ravni. Ako posmatramo Dekartov koordinatni sistem sa osama \mathbf{x} , \mathbf{y} i \mathbf{z} onda je potrebno da poznajemo vektore \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y i \mathbf{p}_z odnosno njihove projekcije kako slijedi.

$$\vec{p}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$$

$$\vec{p}_y = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k}$$

$$\vec{p}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k}$$

Tenzor napona:

Ako projekcije ovih vektora napišemo u matričnom obliku dobijamo tenzor prostornog stanja napona.

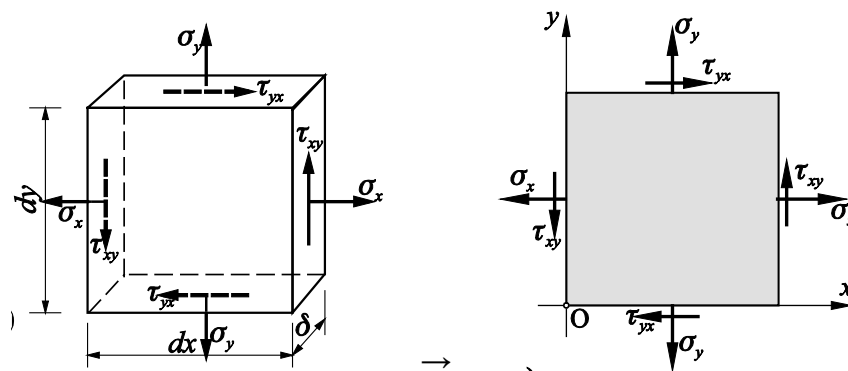
$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Dakle, ako poznamo tenzor napona poznamo stanje napona u tački. Tenzor napona čini 9 komponenti napona 3 normalna napona i 6 smičuća napona. Međutim određene komponente smičućih napona su međusobno zavisne – **stav o konjugovanosti smičućih napona** ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ i $\tau_{xz} = \tau_{zx}$). Dakle, tenzor napona je matrica simetrična u odnosu na dijagonalu i čini je 6 međusobno nezavisnih komponenti.

Zbog komplikovanosti, nadalje ćemo se baviti ravnim stanjem napona.

2. RAVNO STANJE NAPONA – NAPONI U PROIZVOLJNOJ KOSOJ RAVNI, GLAVNI NAPONI, MOHROV KRUG NAPONA

Ako naponi u proizvoljnoj tački napregnutog tijela na svim presječnim ravnima djeluju u jednoj ravni, stanje napona nazivamo ravnim naponskim stanjem.

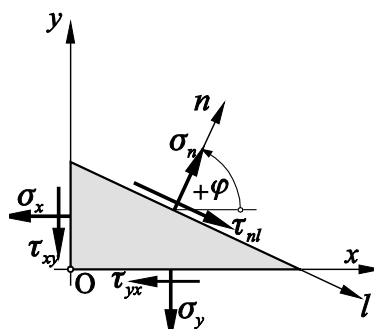


Tenzor napona za ravno stanje napona piše se u obliku

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Naponi u kosoj ravni:

Da bi smo odredili promjenu napona u zavisnosti od položaja presjeka kroz tačku povući ćemo kosu ravan pod uglom $+\varphi$ u odnosu na x osu čija je normala \mathbf{n} (Slika niže). Pozitivan smjer ugla φ je obrnut smjeru kretanja kazaljke na satu.



Orijentacija ose l određuje smjer pozitivnog tangencijalnog napona τ_{nl} . Za pozitivan tangencijalni napon usvojen je onaj koji se pri rotaciji od 90° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu poklapa sa pozitivnim normalnim naponom σ_n .

Iz uslova ravnoteže $\sum \mathbf{n}=0$ i $\sum \mathbf{l}=0$ se dobijaju vrijednosti komponentalnih napona za ravan sa normalom \mathbf{n} :

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tau_{nl} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$$

Glavni naponi, glavne ravni (pravci):

Iz prethodnih izraza se vidi da se komponente napona mijenjaju kako se mijenja ugao φ . Nas interesuje ekstremne vrijednosti (maksimum i minimum) normalnog napona i ravni u kojima se javljaju. Može se pokazati da se te vrijednosti računaju kako slijedi:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Naponi σ_1 i σ_2 predstavljaju ekstremne vrijednosti normalnih napona i nazivaju se **glavni normalni naponi** u datoj tački, a ravni u kojima oni djeluju nazivaju se **glavne ravni**. Pravci koji se poklapaju sa pravcima glavnih napona nazivaju se **pravci glavnih napona**, dok se sistem odgovarajućih koordinatnih osa naziva **glavnim osama**.

Pravac **1** predstavlja normalu za ravan u kojoj djeluje ekstremni maksimalni napon je definisan uglom α kako slijedi:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \begin{cases} \operatorname{sign} [\sin 2\alpha] = \operatorname{sign} [2\tau_{xy}] \\ \operatorname{sign} [\cos 2\alpha] = \operatorname{sign} [\sigma_x - \sigma_y] \end{cases} \quad \alpha = \begin{cases} 0.5 \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) & \text{za } (\sigma_x - \sigma_y) > 0 \\ 0.5 \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) + 90^\circ & \text{za } (\sigma_x - \sigma_y) < 0 \end{cases}$$

U glavnim ravnima smičući naponi su nula – $\tau_{12}=0$.

Maksimalni smičući napon (τ_{max}) i odgovarajući normalni naponi (σ_{odg}):

$$\tau_{max} = 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\sigma_{odg} = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_2)$$

Predmetne komponente djeluju u ravni čija normala je zarotirana za $+45^\circ$ u odnosu na glavni pravac **1**.

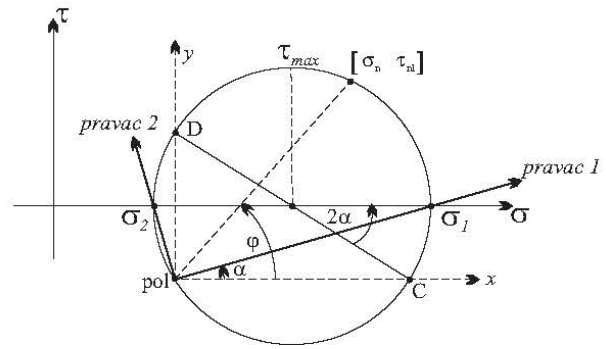
Mohr-ov krug napona:

Mohr-ov krug napona je geometrijsko mjesto tačaka čije koordinate (σ_n, τ_{nl}) definišu napone za sve moguće pravce n kroz posmatranu tačku.

Mohr-ov krug napona
(slučaj ravnog stanja napona)

tačke potrebne za konstrukciju
Mohr-ovog kruga napona

$$[C] = \begin{bmatrix} \sigma_x & -\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}$$



LITERATURA

1. R. Pejović, Građevinska mehanika (II dio) – OTPORNOST, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2014.
2. R. Pejović, Otpornost materijala, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2015.
3. V. Brčić, Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
4. V. Lubarda, Otpornost materijala, Univerzitet „Veljko Vlahović“ u Titogradu, Titograd, 1989.